

# UNE NOUVELLE APPROCHE EXPÉIMENTALE POUR TESTER LES MODÈLES QUANTIQUES DE L'ERREUR DE CONJONCTION

Sébastien Duchêne, Thomas Boyer-Kassem et Eric Guerci

Presses de Sciences Po | « Revue économique »

2017/5 Vol. 68 | pages 757 à 771

ISSN 0035-2764

ISBN 9782724635072

Article disponible en ligne à l'adresse :

---

<https://www.cairn.info/revue-economique-2017-5-page-757.htm>

---

Distribution électronique Cairn.info pour Presses de Sciences Po.

© Presses de Sciences Po. Tous droits réservés pour tous pays.

La reproduction ou représentation de cet article, notamment par photocopie, n'est autorisée que dans les limites des conditions générales d'utilisation du site ou, le cas échéant, des conditions générales de la licence souscrite par votre établissement. Toute autre reproduction ou représentation, en tout ou partie, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit, est interdite sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, en dehors des cas prévus par la législation en vigueur en France. Il est précisé que son stockage dans une base de données est également interdit.

# Une nouvelle approche expérimentale pour tester les modèles quantiques de l'erreur de conjonction

---

Sébastien Duchêne\*  
Thomas Boyer-Kassem\*\*  
Éric Guerci\*

*La théorie classique des probabilités requiert que la probabilité de la conjonction de deux événements soit inférieure à la probabilité d'un des événements seul. Or les sujets ne jugent empiriquement pas toujours ainsi : c'est la traditionnelle erreur de conjonction. L'une des explications actuellement prometteuses de ce paradoxe repose sur des modèles dits quantiques, développés à partir des outils mathématiques de la mécanique quantique. Mais ces modèles sont-ils empiriquement adéquats ? Quelles versions de ces modèles peuvent être employées ? En particulier, les versions les plus simples, dites non dégénérées, peuvent-elles être suffisantes ? Nous proposons ici un protocole expérimental original pour tester en laboratoire les modèles quantiques de l'erreur de conjonction. Les résultats obtenus suggèrent que les modèles non dégénérés ne sont pas empiriquement adéquats, et que la recherche future concernant les modèles quantiques devrait s'orienter vers les modèles dégénérés.*

## A NEW EXPERIMENTAL APPROACH TO TEST QUANTUM-LIKE MODELS FOR THE CONJUNCTION FALLACY

*In classical probability theory, the probability of the conjunction of two events is smaller than the probability of only one of these events. Yet, agents do not always empirically judge in this way: this is the traditional conjunction fallacy. One of the currently promising accounts of this paradox relies on so-called quantum-like models, which have been developed from mathematical tools used in quantum theory. But are these models empirically adequate? Which versions of these models can be used? In particular, can the simplest versions, the non-degenerate ones, be sufficient? We propose here an original experimental protocol to test the*

---

\* Université Côte d'Azur, CNRS, GREDEG, Valbonne, France. Correspondance : 250 rue Albert Einstein, 06560 Valbonne, France. Courriels : sebastien.duchene@gredeg.cnrs.fr, eric.guerci@gredeg.cnrs.fr

\*\* Tilburg Center for Logic, Ethics and Philosophy of Science, Tilburg University, Pays-Bas ; Archives H. Poincaré (UMR 7117, CNRS, Université de Lorraine), Nancy, France. Correspondance : Tilburg University, PO Box 90153, 5000 LE Tilbourg, Pays-Bas. Courriel : t.c.e.boyer-kassem@uvt.nl

Nous remercions Camille Aron, Jérôme Busemeyer, Sophie Dubois, Dorian Jullien, Corrado Lagazio, Gabriel Lemarié, Zheng J. Wang et deux évaluateurs de la *Revue économique* pour leurs commentaires et suggestions constructives. Nous remercions enfin le Laboratoire d'économie théorique et appliquée de Montpellier (LAMETA) et Dimitri Dubois, qui nous ont permis de réaliser cette expérience. Ce travail a bénéficié d'une bourse du Réseau national des MSHS et du CNRS à travers le projet « Quantumtest ».

*quantum-like models for the conjunction fallacy in the lab. The results we obtain suggest that the non-degenerate models are not empirically adequate, and that future research on quantum-like models should consider degenerate ones.*

Classification *JEL* : C60, C91, D03.

## INTRODUCTION

Si l'on a longtemps cherché à modéliser les jugements humains, et leur rationalité, au moyen de la théorie classique des probabilités, les expériences réalisées ces vingt dernières années sur les processus cognitifs ont régulièrement souligné l'inadéquation expérimentale de certaines propriétés des probabilités classiques. C'est le cas, du moins à première vue, pour l'erreur de conjonction, qui survient lorsqu'un sujet juge la conjonction de deux événements plus probable que l'un des événements seul. Elle est typiquement illustrée à l'aide d'une expérience réalisée par Tversky et Kahneman [1982], [1983], commençant par la description suivante : « Linda a 31 ans, elle est célibataire, franche et très brillante. Elle est diplômée en philosophie. Lorsqu'elle était étudiante, elle se sentait très concernée par les questions de discrimination et de justice sociale et avait aussi participé à des manifestations antinucléaires. » Les sujets sont ensuite invités à classer des propositions suivant leur degré de probabilité, parmi lesquelles figurent notamment les deux suivantes :

1. « Linda est employée de banque »;
2. « Linda est féministe et employée de banque ».

De nombreux sujets jugent la seconde plus probable que la première. Cela constitue un paradoxe pour une théorie du jugement s'appuyant sur des probabilités classiques, qui requièrent qu'une conjonction de deux événements soit inférieure à l'un des événements qui la composent.

Un tel résultat expérimental a éveillé la curiosité des psychologues et économistes, qui en ont établi la robustesse au moyen de nombreux protocoles expérimentaux (voir notamment Gavanski et Roskos-Ewoldsen [1991], Hertwig [1997], Mellers, Hertwig et Kahneman [2001], Stolarz-Fantino *et al.* [2003], Hertwig, Benz et Krauss [2008], Moro [2009], Kahneman [2011] et Tentori et Crupi [2013]). L'impact de cette erreur de conjonction dans la prise de décision a été étudié en économie expérimentale (Nilsson et Anderson [2010]; Erceg et Galic [2014]; Charness, Karni et Levin [2010]).

Comment cette erreur de conjonction peut-elle être expliquée ? Différentes pistes ont été avancées, sans qu'aucune ne parvienne véritablement à s'imposer. Tversky et Kahneman ont initialement proposé une heuristique de représentativité, mais il a été objecté que ce concept est mal défini (Gigerenzer [1996]; Birnbaum, Anderson et Hynan [1990]), et des suggestions pour le préciser formellement (Shafir, Smith et Osherson [1990]; Massaro [1994]) ne s'appliquent qu'à certains cas seulement (Crupi, Fitelson et Tentori [2008]). Gavanski et Roskos-Ewoldsen [1991] ou Nilsson *et al.* [2009] ont considéré que la probabilité d'une conjonction

était évaluée à partir d'une combinaison des probabilités respectives de chaque événement qui la compose, mais cette explication ne résiste pas aux tests expérimentaux (Tentori, Crupi et Russo [2013]). Ces derniers ont proposé une explication reposant sur la notion de la confirmation inductive, dans un cadre bayésien, et il s'agit d'une explication prometteuse. Une autre explication séduisante repose sur des modèles quantiques, en tirant parti d'une théorie des probabilités qui n'est pas classique, dans laquelle des amplitudes de probabilités peuvent interférer de sorte que certaines probabilités deviennent supérieures à celles calculées avec les probabilités classiques. Ainsi, plusieurs modèles quantiques affirment rendre compte de l'erreur de conjonction (Franco [2009]; Yukalov et Sornette [2011]; Busemeyer *et al.* [2011]; Busemeyer et Bruza [2012]; Pothos et Busemeyer [2013]; Trueblood, Pothos et Busemeyer [2014]). Ces modèles quantiques sont particulièrement intéressants dans la mesure où ils font partie d'une famille plus large de modèles quantiques de la cognition qui utilisent les mathématiques de la mécanique quantique et qui ont été appliqués à de nombreux jugements paradoxaux (voir par exemple Busemeyer et Bruza [2012] et Haven et Khrennikov [2013]; pour une revue, voir Pothos et Busemeyer [2013] et Ashtiani et Azgomi [2015]). Ils offrent ainsi un cadre théorique nouveau et unificateur en théorie de la décision et en rationalité limitée (Danilov et Lambert-Mogiliansky [2008], [2010]; Yukalov et Sornette [2011]). Les modèles quantiques se développent également en théorie des jeux (Piotrowski et Sladowski [2003]; Landsburg [2004]; Pothos et Busemeyer [2009]; Brandenburger [2010]).

Notre objectif est ici d'évaluer d'une façon critique ces modèles quantiques qui prétendent expliquer l'erreur de conjonction. Pour être légitime, une explication doit reposer sur des modèles empiriquement adéquats. Aussi, nous poursuivrons ici l'étude de l'adéquation empirique de ces modèles quantiques, dans la lignée de travaux récents (par exemple Tentori et Crupi [2013], Tentori, Crupi et Russo [2013], Pothos et Busemeyer [2013], Busemeyer *et al.* [2015] et Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci [2016]). L'originalité de notre étude consiste à avoir conçu et réalisé un protocole expérimental qui permet d'observer l'erreur de conjonction comme un effet résultant d'un autre biais cognitif (l'effet d'ordre). Nous reproduisons en laboratoire une situation expérimentale où un sujet élabore séquentiellement les éléments d'informations construisant la conjonction, ce que la littérature quantique sur l'erreur de conjonction suggère pour expliquer ce paradoxe. Les données expérimentales peuvent ainsi être étudiées en employant deux tests proposés par la littérature très récente des modèles quantiques sur l'effet d'ordre. Premièrement, nous testons en toute généralité les modèles quantiques, en adaptant le test proposé par Wang et Busemeyer [2013] consistant à vérifier si une égalité dite « QQ » est vérifiée. Deuxièmement, la version exacte des modèles utilisés, ou la valeur des paramètres, n'est pas toujours spécifiée, tout comme la dimension de l'espace mathématique utilisé. Les modèles les plus simples, dits « non dégénérés », peuvent-ils être suffisants, ou des modèles plus complexes, avec un nombre plus grand de dimensions et dits « dégénérés », sont-ils requis ? La littérature existante est plutôt favorable aux modèles dégénérés car le grand nombre de dimensions devrait permettre de mieux représenter la complexité du processus cognitif, et elle a tendance à considérer les modèles non dégénérés comme des modèles seulement illustratifs (Busemeyer *et al.* [2015]). Cependant, le choix entre les deux types de modèles n'a pas été définitivement arrêté. Nous proposons donc d'adapter un test proposé par Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci [2016], consistant à vérifier si des équations dites « GR » sont satisfaites.

Avec ces deux objectifs, nous présentons dans la deuxième section une description unifiée et cohérente de la majorité des modèles quantiques non dégénérés de la littérature expliquant l'erreur de conjonction. Dans la troisième section, nous considérons le test de l'égalité « QQ », et dans la quatrième section, celui des équations GR. Dans la cinquième section, nous proposons un nouveau protocole expérimental permettant de réaliser ces deux tests. Nous avons réalisé l'expérience en laboratoire, et les résultats, présentés dans la sixième section, suggèrent que les modèles non dégénérés ne peuvent rendre compte de l'erreur de conjonction. Nous terminons par une discussion dans la septième section.

## COMMENT LES MODÈLES QUANTIQUES EXPLIQUENT L'ERREUR DE CONJONCTION

Plusieurs modèles utilisant le formalisme mathématique de la mécanique quantique ont été proposés pour rendre compte de l'erreur de conjonction, dont un grand nombre reposent sur les mêmes postulats (Franco [2009] ; Busemeyer *et al.* [2011] ; Busemeyer et Bruza [2012] ; Pothos et Busemeyer [2013])<sup>1</sup>. Cette section présente ces modèles à partir de leur version la plus simple, non dégénérée, et au travers de l'expérience de Linda.

Pourquoi utiliser des mathématiques issues de la mécanique quantique ? Une réponse rudimentaire est la suivante : ces mathématiques sont non commutatives, c'est-à-dire que l'ordre des opérations, par exemple l'ordre des questions posées, modifie le résultat final, ici la probabilité. Dans le cas de Linda, si on suppose qu'une conjonction est évaluée par des mathématiques non commutatives, on peut espérer modifier ainsi suffisamment la probabilité d'une conjonction pour qu'elle soit supérieure à la probabilité d'un seul terme.

Plus précisément, pour évaluer la probabilité des propositions 1 et 2, un sujet va considérer deux questions :

$Q_F$  : « Linda est-elle féministe ? »

$Q_B$  : « Linda est-elle employée de banque ? »

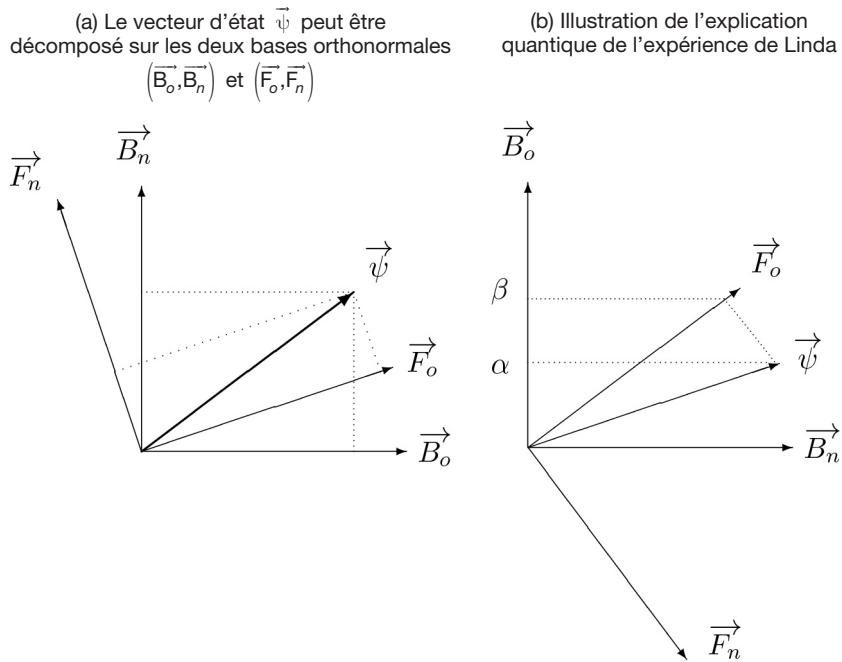
Le modèle mathématique met en jeu un espace vectoriel complexe (appelé espace de Hilbert), dans lequel sont représentées les croyances de l'agent et les réponses aux questions. Les vecteurs  $\vec{F}_o$  et  $\vec{F}_n$  correspondent respectivement aux réponses « Oui » et « Non » à la question  $Q_F$ , et de même pour les vecteurs  $\vec{B}_o$  et  $\vec{B}_n$  pour la question  $Q_B$ .  $(\vec{F}_o, \vec{F}_n)$  et  $(\vec{B}_o, \vec{B}_n)$  constituent ainsi deux bases d'un espace vectoriel à deux dimensions. Cet espace est équipé du produit scalaire : pour deux vecteurs  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$ , le produit scalaire  $\vec{Y} \cdot \vec{Z}$  est un nombre complexe. Les deux bases évoquées précédemment sont supposées être orthonormales. Les croyances de l'agent sont représentées par un vecteur normalisé

---

1. Ces articles présentent des modèles dans des versions à la fois non dégénérées et dégénérées, à l'exception de Franco [2009] qui considère seulement des versions non dégénérées.

$\vec{\psi}$ , appelé « vecteur d'état », qui peut être décomposé dans chacune des deux bases (cf. figure 1a).

Figure 1.



Note : Ces graphiques supposent un espace de Hilbert réel.

La donnée du vecteur d'état  $\vec{\psi}$  permet au modèle quantique de prédire les réponses du sujet de façon probabiliste. La probabilité de répondre par exemple « Oui » à la question  $Q_B$  s'obtient en projetant tout d'abord orthogonalement  $\vec{\psi}$  sur  $\vec{B}_o$ , puis en prenant le module carré de cette longueur :  $p(B_o) = |\vec{B}_o \cdot \vec{\psi}|^2$ .

Géométriquement, plus  $\vec{\psi}$  est aligné avec un vecteur de base  $\vec{X}_i$ , plus grande est la probabilité que l'agent réponde  $i$  à la question  $Q_X$ . Le vecteur d'état  $\vec{\psi}$  ne change que lorsque le sujet répond à une question  $Q_X$ , selon un postulat dit de projection : le nouvel état est proportionnel au vecteur  $\vec{X}_i$  représentant la réponse  $X_i$  donnée (formellement,  $\vec{\psi} \mapsto (\vec{X}_i \cdot \vec{\psi}) / |\vec{X}_i \cdot \vec{\psi}| \cdot \vec{X}_i$ ). Par exemple, sur la figure 1a, si un agent répond « Oui » à la question  $Q_B$ , l'état passe de  $\vec{\psi}$  à  $\vec{B}_o$ . Ainsi, l'état après la réponse à une question est en général différent de l'état avant la question. C'est une différence fondamentale avec le point de vue classique, dans lequel la réponse à une question est censée révéler une

croyance préexistante et donc rester la même avant et après la question. C'est le fait que l'état de l'agent change lors d'une (première) question qui permettra que la réponse à une seconde question soit différente de ce qu'elle aurait été si cette seconde question avait été posée dès le départ. Cela sera utilisé dans l'explication de l'erreur de conjonction.

Ce modèle est dit « non dégénéré », car la réponse  $i$  à une question  $Q_x$  est représentée par un vecteur  $\vec{X}_i$ , et donc potentiellement aussi par tout vecteur  $\lambda \vec{X}_i$  ( $|\lambda|=1$ ), autrement dit par un sous-espace de dimension 1, dans un espace de Hilbert de dimension 2. La littérature a également considéré des modèles dits « dégénérés », dans lesquels la réponse à une question est représentée par un sous-espace de dimension strictement supérieure à 1. L'espace de Hilbert ne se limite alors pas à la dimension 2 comme ici.

À partir de ce modèle quantique, l'explication de l'erreur de conjonction est la suivante. D'une part, pour évaluer la probabilité de la proposition 1, « Linda est employée de banque », l'agent considère la question  $Q_B$ , « Linda est-elle employée de banque ? ». Le modèle quantique prédit la probabilité  $p(B_o)$  pour la réponse « Oui », qui vaut, pour la figure 1b,  $p(1)=|\alpha|^2$ . D'autre part, pour évaluer la probabilité de la conjonction 2, « Linda est féministe et employée de banque », le modèle suppose que l'agent considère successivement les questions  $Q_F$  (« Linda est-elle féministe ? ») et  $Q_B$  (« Linda est-elle employée de banque ? »). L'hypothèse est faite que l'agent commence par la question de l'événement qui semble le plus probable, ici  $Q_F$ , car la description de Linda la rend plus vraisemblablement féministe qu'employée de banque<sup>2</sup>. Sur la figure 1b, la probabilité de répondre « Oui » aux deux questions successives correspond au carré de la projection de  $\vec{\psi}$  sur deux vecteurs successifs, tout d'abord sur  $\vec{F}_o$  puis sur  $\vec{B}_o$ , de telle sorte que  $p(2)=|\beta|^2$ . Ainsi, projeter le vecteur d'état lors d'une première question (ici sur  $\vec{F}_o$ ) a augmenté le résultat de la projection lors d'une seconde question ( $\beta > \alpha$ ). Il existe donc certaines configurations des vecteurs de base et du vecteur d'état pour lesquelles un agent évalue la probabilité que Linda soit féministe et employée de banque comme étant supérieure à la probabilité qu'elle soit employée de banque ( $p(1) < p(2)$ ). L'erreur de conjonction est expliquée par ce modèle quantique<sup>3</sup>.

2. Le fait que l'événement le plus probable soit évalué en premier est une hypothèse *ad hoc* de ces modèles quantiques de la cognition. L'hypothèse inverse ne permettrait pas de rendre compte de l'erreur de conjonction. Noter également que le même vecteur d'état  $\vec{\psi}$  est utilisé comme vecteur initial pour évaluer les deux propositions 1 et 2.

3. La valeur du vecteur d'état  $\vec{\psi}$  est ici calculée de façon *ad hoc*, la littérature ne proposant pas d'autres tests de sa valeur. Cependant, la position relative des bases peut quant à elle recevoir une certaine justification théorique : des concepts proches devraient être représentés par des vecteurs ayant entre eux un angle faible. Pothos et Busemeyer ([2013], p. 315-316) présentent par exemple un tel calcul de la position relative des bases. On notera que cette position relative est contrainte par les données empiriques. Autrement dit, un modèle quantique n'est capable de rendre compte de l'erreur de conjonction que si certains concepts sont perçus comme étant proches ou au contraire éloignés.

## PREMIER TEST : L'ÉGALITÉ QQ

Le modèle quantique de la section précédente est-il empiriquement adéquat ? Si de nouvelles prédictions expérimentales peuvent être dérivées de ces modèles, peut-on les tester ? Dans cette section et la suivante, nous proposons deux tests expérimentaux. Ils ont été récemment proposés pour des modèles quantiques d'un autre phénomène, l'effet d'ordre, défini par le fait que les réponses à deux questions dépendent de l'ordre dans lequel ces questions sont posées. Les deux tests s'appliquent tout aussi bien à ce modèle quantique de l'erreur de conjonction, qui reprend le modèle quantique d'effet d'ordre.

Wang et Busemeyer [2013] ont montré que ce modèle quantique, qu'il soit dégénéré ou non, doit satisfaire une égalité dite « *quantum question* » (QQ), lorsque deux questions  $Q_X$  et  $Q_Y$  sont posées successivement. En notant  $p(X_i, Y_j)$  la probabilité conjointe de répondre  $i$  à  $Q_X$  puis  $j$  à  $Q_Y$ , l'égalité QQ s'écrit :

$$p(F_y, B_n) + p(F_n, B_y) = p(B_y, F_n) + p(B_n, F_y). \quad (1)$$

Cette égalité porte sur une expérience dans laquelle les deux questions  $Q_B$  et  $Q_F$  sont posées successivement, dans un ordre et dans un autre. Elle s'interprète ainsi : la probabilité que des réponses différentes soit données à  $Q_B$  et  $Q_F$  (« Oui » puis « Non », ou « Non » puis « Oui ») est la même quel que soit l'ordre des questions (une équation équivalente peut être écrite pour des réponses *identiques*). Comme l'égalité QQ est « une prédition *a priori, précise, quantitative et sans paramètre d'ajustement* » (Busemeyer *et al.* [2015], p. 241), elle est d'importance centrale. Elle a été testée sur des bases de données pour des modèles d'effet d'ordre (Wang et Busemeyer [2013]; Wang *et al.* [2014]). De même, nous proposons de la tester empiriquement dans le cas des modèles expliquant l'erreur de conjonction. Si l'égalité n'était pas satisfaite, aucun modèle quantique du type considéré dans la deuxième section (quels que soient ses paramètres ou sa dégénérescence) ne pourrait rendre compte de l'expérience en question.

## SECOND TEST : LES ÉQUATIONS GR

Le modèle quantique de la deuxième section implique d'autres prédictions empiriques importantes, comme l'ont établi Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci [2016]. Tout d'abord, on montre facilement que la probabilité conditionnelle  $p(B_o | F_o)$  vaut dans ce modèle  $|\vec{B}_o \cdot \vec{F}_o|^2$ , c'est-à-dire le module carré du produit scalaire entre les deux vecteurs de base correspondant aux réponses données. Dans la figure 1, cela correspond au cosinus carré de l'angle entre les vecteurs  $\vec{B}_o$  et  $\vec{F}_o$ . Mais l'ordre dans le produit scalaire importe peu :  $|\vec{B}_o \cdot \vec{F}_o|^2 = |\vec{F}_o \cdot \vec{B}_o|^2$ , donc finalement  $p(B_o | F_o) = p(F_o | B_o)$ . De même pour n'importe quel couple de réponses  $B_o, B_n, F_o, F_n$  : les probabilités conditionnelles d'une réponse sachant une autre réponse sont les mêmes quel que soit l'ordre des questions (loi dite de « *réciprocité* », bien connue en mécanique quantique). Cette loi, qui peut

sembler contre-intuitive, est typiquement quantique et découle directement du formalisme utilisé.

Ensuite,  $p(B_o | F_o)$  peut être réécrit comme  $1 - p(B_n | F_o)$  parce qu'il n'y a que deux réponses possibles,  $B_o$  ou  $B_n$ . Or  $1 - p(B_n | F_o) = 1 - p(F_o | B_n)$  par la loi de réciprocité. Comme il n'y a que deux réponses possibles à la question  $Q_F$ , de même  $1 - p(F_o | B_n) = p(F_n | B_n)$ . Et  $p(F_n | B_n) = p(B_n | F_n)$  par la loi de réciprocité, donc  $p(B_o | F_o) = p(B_n | F_n)$ . On montre ainsi l'ensemble d'équations suivantes :

$$p(B_o | F_o) = p(B_n | F_n), \quad (2)$$

$$p(F_o | B_o) = p(F_n | B_n), \quad (3)$$

$$p(B_n | F_o) = p(B_o | F_n), \quad (4)$$

$$p(F_o | B_n) = p(F_n | B_o). \quad (5)$$

De par la loi de réciprocité, le dernier membre de la première équation est égal au dernier membre de la deuxième, et de même pour les deux dernières équations. On peut alors écrire deux équations dites de « grand-réciprocité », ou équations GR (Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci [2016]), elles-mêmes équivalentes entre elles :

$$p(B_o | F_o) = p(F_o | B_o) = p(B_n | F_n) = p(F_n | B_n), \quad (6)$$

$$p(B_n | F_o) = p(F_o | B_n) = p(B_o | F_n) = p(F_n | B_o). \quad (7)$$

Ces équations montrent que le modèle quantique laisse très peu de liberté aux probabilités conditionnelles : parmi les huit quantités qui peuvent être mesurées expérimentalement, il y a seulement un paramètre réel libre. Sur la figure 1, cela se comprend par le fait que la base B est entièrement déterminée par l'angle qu'elle fait avec la base F, et réciproquement. Vu la force de ces contraintes, on peut s'attendre à ce que ces équations ne soient pas vérifiées expérimentalement. Si tel était le cas, le modèle présenté dans la section précédente ne pourrait prétendre rendre compte de l'erreur de conjonction<sup>4</sup>.

## PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL

Tester l'égalité QQ comme les équations GR suppose de réaliser une expérience d'effet d'ordre en posant à des agents différents les questions  $Q_F$  puis  $Q_B$ , ou  $Q_B$  puis  $Q_F$ . Cela revient, pour l'ordre  $Q_F$  puis  $Q_B$ , à forcer l'agent à suivre le processus cognitif supposé par les modèles quantiques lors de l'évaluation d'une

4. Ces équations GR, établies ici pour un agent seul, se généralisent à une population d'agents ayant des vecteurs d'état initiaux différents, ainsi que des vecteurs de base différents (correspondant à des conceptions différentes de ce qu'est être féministe, par exemple), comme le montrent Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci [2016]. Ainsi, il est légitime de tester ces équations de façon statistique sur une population d'agents, comme cela est fait dans la section suivante.

conjonction, puisqu'ils doivent répondre successivement aux deux questions. Il s'agit donc d'un protocole original conçu pour suivre au plus près le processus explicatif quantique. Nous en proposons ici la première réalisation expérimentale.

Pour réaliser les deux tests de façon robuste, nous avons considéré l'histoire de Linda, mais aussi trois autres histoires connues pour donner lieu à une erreur de conjonction. L'expérience est ainsi constituée de quatre tâches – que nous appellerons K., Monsieur F., Bill et Linda –, chacune comportant un texte suivi de deux questions.

La première tâche est tirée de l'histoire de K. (Tentori et Crupi [2013]) :

- Texte : « K. est une femme russe. »
- Q<sub>N</sub> : « Selon vous<sup>5</sup>, K. vit-elle à New York ? »
- Q<sub>I</sub> : « Selon vous, K. est-elle une interprète ? »

La deuxième tâche est tirée de l'histoire de Monsieur F. (Tversky et Kahneman [1983]) :

- Texte : « Une enquête de santé a été menée en France sur un échantillon représentatif d'hommes adultes de tous âges et de toutes professions. Dans cet échantillon, on a choisi au hasard Monsieur F. »
- Q<sub>M</sub> : « Selon vous, Monsieur F. a-t-il plus de 55 ans ? »
- Q<sub>H</sub> : « Selon vous, Monsieur F. a-t-il déjà eu une ou plusieurs attaques cardiaques ? »

La troisième tâche est tirée de l'histoire de Bill (Tversky et Kahneman [1983]) :

- Texte : « Bill a 34 ans. Il est intelligent, mais n'a pas d'imagination, il est compulsif, et généralement plutôt éteint. À l'école, il était fort en mathématiques, mais faible dans les sciences humaines et sociales. »

- Q<sub>A</sub> : « Selon vous, Bill est-il comptable ? »
- Q<sub>J</sub> : « Selon vous, Bill joue-t-il du jazz pour ses loisirs ? »

La quatrième tâche est celle de Linda.

Pour assurer la robustesse de l'expérience, nous avons pris soin de considérer à la fois des erreurs de conjonction de type « MA » (K., Bill et Linda) et de type « AB » (Monsieur F.), selon la classification classique des erreurs de conjonction (Tversky et Kahneman [1983])<sup>6</sup>.

Nous avons jugé important d'effectuer les expériences en laboratoire en respectant les « bonnes pratiques expérimentales » de recrutement aléatoire en ligne et de rémunération des étudiants. Nous les avons donc indemnisés pour leur participation (à hauteur de 5 ou 9 euros selon le campus d'origine des étudiants) afin de réduire le risque de biais de sélectivité. Les sujets ont été recrutés parmi les étudiants de toutes les disciplines de l'Université de Montpellier (économie, sociologie, pharmacie,

5. Les termes « selon vous » précédant la question proprement dite ont été ajoutés afin que les sujets ne tentent pas de s'interroger sur l'éventuelle existence d'une réponse correcte. Ils traduisent par ailleurs l'idée de la consigne initiale de Tversky et Kahnemann [1983] d'évaluer une caractéristique en fonction de sa probabilité, ce qui suppose ici une part subjective du jugement.

6. Dans le paradigme MA, un modèle M (*e.g.* le texte décrivant Linda) est positivement associé avec un événement A (*e.g.* Linda est féministe) et négativement avec un autre événement B (*e.g.* Linda est employée de banque). Dans le paradigme AB, A (*e.g.* Monsieur F. a eu une ou plusieurs attaques cardiaques) est positivement associé avec B (*e.g.* Monsieur F. a plus de 55 ans) et n'est pas représentatif de M (le texte décrivant Monsieur F.).

lettres...). L'expérience a été réalisée au Laboratoire montPELLIÉRAIN d'économie théorique et appliquée (LAMETA) les 17 et 28 avril 2015, avec vingt sessions impliquant 302 élèves. Toutes les précautions ont été prises afin d'éviter les discussions entre les sujets ayant effectué l'expérience et ceux ne l'ayant pas encore effectuée.

L'expérience a été implémentée sur ordinateur, à l'aide du programme z-Tree (Fischbacher [2007]). Les sujets, après avoir été installés devant un ordinateur, ont reçu de brèves instructions orales précisant que plusieurs questions leur seraient posées à la suite de textes descriptifs. Les quatre tâches ont été présentées l'une après l'autre à chaque sujet. La structure du protocole est identique pour chaque tâche ; nous la présentons sur celle de Linda. Chaque tâche se décline en deux traitements, un sujet n'en recevant qu'un seul : l'un des traitements contient les questions dans l'ordre  $Q_F$  puis  $Q_B$ , l'autre dans l'ordre  $Q_B$  puis  $Q_F$ <sup>7</sup>. Un premier écran affiche le texte de description de Linda. Si le sujet reçoit le traitement  $Q_F$  puis  $Q_B$ , un second écran pose la question  $Q_F$  avec le choix entre les réponses « Oui » ou « Non ». Un troisième écran pose la question  $Q_B$  avec le choix entre les réponses « Oui » ou « Non ». Si le sujet reçoit le traitement  $Q_B$  puis  $Q_F$ , les écrans 2 et 3 sont intervertis.

Notre protocole propose successivement quatre tâches à chaque agent : n'y a-t-il pas le risque qu'une tâche perturbe les suivantes ? Deux arguments permettent de répondre négativement. Expérimentalement tout d'abord, Stolartz-Fantino *et al.* [2003] ont proposé six tâches de conjonction et n'ont pas observé de différence significative du taux d'erreur de conjonction au fil des tâches. Il ne semble donc pas y avoir d'effet d'apprentissage pour l'erreur de conjonction, ou d'influence entre tâches. La successivité des tâches est également justifiée théoriquement : les modèles quantiques de l'erreur de conjonction font l'hypothèse que, lorsque les thèmes des histoires et les représentations mentales que s'en fait l'agent sont suffisamment éloignés les uns des autres, ce qui semble très clairement être le cas ici, les bases vectorielles des différentes caractéristiques (Linda est féministe, Bill est joueur de jazz, etc.) sont compatibles au sens mathématique de la mécanique quantique, ce qui implique qu'il ne peut y avoir d'effet d'ordre *entre* les différentes tâches (voir par exemple Wang et Busemeyer [2013]). Autrement dit, les modèles quantiques eux-mêmes affirment qu'il n'y a pas d'influence d'une tâche sur l'autre, et que l'ordre des tâches n'affecte pas les résultats. Il se peut que cette affirmation soit empiriquement erronée, mais peu importe : comme ici nous cherchons seulement à tester ces modèles quantiques et non pas à établir des résultats expérimentaux valables en dehors de ces modèles, il est légitime de s'appuyer sur ces hypothèses issues des modèles eux-mêmes. Les modèles quantiques justifient donc notre protocole expérimental qui les teste, et cela suffit.

## RÉSULTATS

Les fréquences conjointes obtenues lors de l'expérience sont présentées dans l'annexe I. Pour tester l'égalité QQ, nous adoptons le test statistique de Wang et Busemeyer [2013] et Wang *et al.* [2014]<sup>8</sup>. Comme nous effectuons le même

---

7. Ainsi, le protocole de notre expérience peut être qualifié de *between subjects*.

8. Nous remercions les auteurs de ces deux articles pour nous avoir aimablement fourni le code informatique de ce test.

test sur quatre tâches différentes, nous adoptons une correction de Bonferroni de l'erreur de type I, qui est la plus conservatrice, dans la mesure où les rejets de faux positifs sont beaucoup moins susceptibles de se produire. Le tableau 1 indique les valeurs-*p* ajustées pour chaque tâche, avec l'hypothèse nulle que l'égalité QQ est satisfaite pour toutes les tâches. Il apparaît qu'aucune tâche ne rejette l'hypothèse nulle. Il n'est donc pas possible d'affirmer que l'égalité QQ n'est pas satisfaite sur ces tâches (réciproquement, ce test ne permet pas de conclure que l'égalité QQ est effectivement satisfaite, étant donné la présence possible de faux négatifs). L'interprétation de ces résultats est que ces expériences ne permettent pas de conclure que les modèles quantiques sont empiriquement inadéquats. Il apparaît donc d'autant plus utile de procéder au test plus spécifique des équations GR sur les modèles non dégénérés.

Tableau 1. Valeurs-*p* ajustées pour chaque tâche, pour l'égalité QQ

Tâche	Égalité QQ
K.	2,42
Monsieur F.	1,92
Bill	3,54
Linda	0,10

*Note :* Aucune tâche ne rejette l'hypothèse nulle de satisfaction de l'égalité QQ à 5 %. Avec la correction de Bonferroni, la probabilité d'avoir au moins un faux positif dans l'ensemble du tableau est inférieure à 5 %.

Tableau 2. Valeurs-*p* ajustées pour les tests T1 à T6 réalisés sur les quatre différentes tâches, pour les équations GR

Tâche	T1	T2	T3	T4	T5	T6	#R à 5 %
K.	1,49	<b>0,01</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	2,34	4
Monsieur F.	<b>0,05</b>	19,81	1,72	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	0,37	3
Bill	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	0,52	0,09	<b>0,00</b>	4
Linda	0,52	12,53	0,36	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	3

*Note :* Le rejet est indiqué en gras avec un seuil de significativité de 5 %. Avec la double correction de Bonferroni, la probabilité d'avoir au moins un faux positif dans l'ensemble du tableau est inférieure à 5 %. La dernière colonne reporte le nombre de rejets par tâche.

L'équation GR est équivalente à six tests T1-T6 de comparaisons deux à deux (*cf.* annexe II), avec l'hypothèse nulle que les fréquences conditionnelles sont égales entre elles. Les probabilités conditionnelles de cette équation sont estimées en considérant les fréquences conditionnelles  $f(F_i | B_j)$  et  $f(B_j | F_i)$ , que l'on peut calculer à partir des fréquences conjointes du tableau A1 (annexe I). En utilisant le test statistique de Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci ([2016], annexe 1),

on obtient les résultats présentés dans le tableau 2. On observe que pour chacune des quatre tâches, trois tests ou plus parmi les six rejettent l'hypothèse nulle de l'égalité entre les deux fréquences conditionnelles – alors qu'un seul rejet est suffisant pour établir que les équations GR ne sont pas vérifiées. L'interprétation de ces résultats est claire : les modèles non dégénérés ne peuvent rendre compte des prédictions empiriques observées dans notre expérience pour les quatre tâches d'erreur de conjonction.

## DISCUSSION

Nous avons considéré ici des modèles quantiques qui entendent rendre compte de l'erreur de conjonction (Franco [2009]; Busemeyer *et al.* [2011]; Busemeyer et Bruza [2012]; Pothos et Busemeyer [2013]). Nous avons proposé de tester l'adéquation empirique des modèles quantiques de deux façons, à travers l'égalité QQ et les équations GR, la première s'appliquant à tous les modèles tandis que les dernières ne concernent que les modèles non dégénérés. Nous avons réalisé une expérience inédite, qui est une variation autour des expériences classiques de l'erreur de conjonction, permettant de réaliser ces tests. Les résultats expérimentaux que nous avons obtenus, s'ils ne permettent pas d'exclure les modèles quantiques de façon générale, montrent nettement que les équations GR ne sont pas vérifiées, et donc que ces modèles quantiques non dégénérés ne sont pas adéquats d'un point de vue empirique et ne peuvent prétendre rendre compte de l'erreur de conjonction pour les quatre histoires considérées. Cela confirme certaines intuitions de la littérature (*e.g.*, Busemeyer *et al.* [2015]) selon lesquelles les modèles non dégénérés doivent surtout avoir un rôle illustratif. Nous avons considéré ici des histoires variées, appartenant aux deux types d'erreur de conjonction distingués (AB et MA), ce qui suggère fortement que les erreurs de conjonction *en général* ne sont pas explicables par des modèles quantiques non dégénérés.

Au-delà du rejet des modèles quantiques non dégénérés, quelles suggestions constructives pouvons-nous proposer ? Tout d'abord, nous avons clairement indiqué que le rejet par les équations GR ne concerne que les modèles non dégénérés. Or rappelons que Busemeyer *et al.* [2011], Busemeyer et Bruza [2012] et Pothos et Busemeyer [2013] considèrent également des modèles dégénérés. Ceux-ci n'étant pas exclus par nos résultats, ils apparaissent comme une voie légitime et prometteuse pour rendre compte de l'erreur de conjonction, comme ils le sont pour rendre compte par exemple de l'effet d'ordre (voir Busemeyer, Wang et Lambert-Mogiliansky [2009], Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci [2016]). Cependant, le fait de passer à des modèles dégénérés n'est pas sans difficulté potentielle, car ceux-ci ne sont pas *a priori* libres de toute contrainte (voir Boyer-Kassem, Duchêne et Guerci [2016]) : en particulier, s'il existe des questions fondamentales dont les réponses sont représentées par des sous-espaces de dimension 1 (voir Pothos et Busemeyer [2013]), alors les modèles dégénérés peuvent être testés au moyen d'équations GR généralisées ; par ailleurs, les dimensions supplémentaires de dégénérescence devraient recevoir une justification à la fois empirique et théorique afin que les modèles ne puissent pas être accusés d'être *ad hoc*. Les modèles quantiques de la cognition apparaissent néanmoins comme étant

un champ de recherche prometteur : le cadre probabiliste non classique qu'ils ont introduit semble pouvoir s'appliquer à de nombreux jugements paradoxaux, et la modélisation quantique a également permis de renouveler l'étude de la notion d'indétermination des préférences (*cf.* Introduction). Il nous semble donc que les modèles dégénérés méritent une attention particulière dans le futur.

Enfin, comme indiqué en introduction, les modèles quantiques ne sont pas les seuls candidats à l'explication de l'erreur de conjonction. La démarche adoptée dans cet article peut aisément s'étendre aux autres explications : il s'agira de chercher à tester leurs modèles à partir des prédictions nouvelles qu'ils formulent. L'économie expérimentale a ici un rôle clé à jouer dans le test des différentes explications de l'erreur de conjonction, qu'elles soient quantiques ou non.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ASHTIANI M. et AZGOMI M. A. [2015], « A Survey of Quantum-Like Approaches to Decision Making and Cognition », *Mathematical Social Sciences*, 75 (C), p. 49-80.
- BIRNBAUM M. H., ANDERSON C. J. et HYNAN U. G. [1990], « Theories of Bias in Probability Judgment », *Advances in Psychology*, 68 (C), p. 477-498.
- BOYER-KASSEM T., DUCHÈNE S. et GUERCI É. [2016], « Testing Quantum-Like Models of Judgment for Question Order Effects », *Mathematical Social Sciences*, 80, p. 33-46.
- BRANDENBURGER A. [2010], « The Relationship between Quantum and Classical Correlation in Games », *Games and Economic Behavior*, 69 (1), p. 175-183.
- BUSEMEYER J. R. et BRUZA P. D. [2012], *Quantum Models of Cognition and Decision*, Cambridge, Cambridge University Press.
- BUSEMEYER J. R., POTHOS E. M., FRANCO R. et TRUEBLOOD J. S. [2011], « A Quantum Theoretical Explanation for Probability Judgment Errors », *Psychological Review*, 118 (2), p. 193-218.
- BUSEMEYER J. R., WANG Z. J. et LAMBERT-MOGILIANSKY A. [2009], « Empirical Comparison of Markov and Quantum Models of Decision Making », *Journal of Mathematical Psychology*, 53 (5), p. 423-433.
- BUSEMEYER J. R., WANG Z. J., POTHOS E. M. et TRUEBLOOD J. S. [2015], « The Conjunction Fallacy, Confirmation, and Quantum Theory: Comment on Tentori, Crupi, and Russo (2013) », *Journal of Experimental Psychology: General*, 144 (1), p. 236-243.
- CHARNESS G., KARNI E. et LEVIN D. [2010], « On the Conjunction Fallacy in Probability Judgment: New Experimental Evidence Regarding Linda », *Games and Economic Behavior*, 68 (2), p. 551-556.
- CRUPI V., FITELSON B. et TENTORI K. [2008], « Probability, Confirmation and the Conjunction Fallacy », *Thinking & Reasoning*, 14 (2), p. 182-199.
- DANILOV V. I. et LAMBERT-MOGILIANSKY A. [2008], « Measurable Systems and Behavioral Sciences », *Mathematical Social Sciences*, 55 (3), p. 315-340.
- DANILOV V. I. et LAMBERT-MOGILIANSKY A. [2010], « Expected Utility Theory under Non-Classical Uncertainty », *Theory and Decision*, 68 (1), p. 25-47.
- ERCEG N. et GALIC Z. [2014], « Overconfidence Bias and Conjunction Fallacy in Predicting Outcomes of Football Matches », *Journal of Economic Psychology*, 42, p. 52-62.
- FISCHBACHER U. [2007], « z-Tree: Zurich Toolbox for Ready-Made Economic Experiments », *Experimental Economics*, 10 (2), p. 171-178.
- FRANCO R. [2009], « The Conjunction Fallacy and Interference Effects », *Journal of Mathematical Psychology*, 53, p. 415-422.
- GAVANSKI I. et ROSKOS-EWOLDSEN D. R. [1991], « Representativeness and Conjoint Probability », *Journal of Personality and Social Psychology*, 61 (2), p. 181-194.
- GIGERENZER G. [1996], « On Narrow Norms and Vague Heuristics: A Reply to Kahneman and Tversky (1996) », *Psychological Review*, 103 (3), p. 592-596.

- HAVEN E. et KHRENNIKOV A. [2013], *Quantum Social Science*, Cambridge, Cambridge University Press.
- HERTWIG R. [1997], *Judgment under Uncertainty: Beyond Probabilities*, manuscrit non publié, Berlin, Max Planck Institute for Human Development.
- HERTWIG R., BENZ B. et KRAUSS S. [2008], « The Conjunction Fallacy and the Many Meanings of and », *Cognition*, 108 (3), p. 740-753.
- KAHNEMAN D. [2011], *Thinking, Fast and Slow*, New York, Farrar, Straus and Giroux.
- LANDSBURG S. E. [2004], « Quantum Game Theory », *Notices of the American Mathematical Society*, 51 (4), p. 394-399.
- MASSARO D. W. [1994], « A Pattern Recognition Account of Decision Making », *Memory & Cognition*, 22 (5), p. 616-627.
- MELLERS B., HERTWIG R. et KAHNEMAN D. [2001], « Do Frequency Representations Eliminate Conjunction Effects? An Exercise in Adversarial Collaboration », *Psychological Science*, 12 (4), p. 269-275.
- MORO R. [2009], « On the Nature of the Conjunction Fallacy », *Synthese*, 171 (1), p. 1-24.
- NILSSON H. et ANDERSSON P. [2010], « Making the Seemingly Impossible Appear Possible: Effects of Conjunction Fallacies in Evaluations of Bets on Football Games », *Journal of Economic Psychology*, 31 (2), p. 172-180.
- NILSSON H., WINMAN A., JUSLIN P. et HANSSON G. [2009], « Linda Is Not a Bearded Lady: Configural Weighting and Adding as the Cause of Extension Errors », *Journal of Experimental Psychology: General*, 138 (4), p. 517-534.
- PIOTROWSKI E. W. et STADKOWSKI J. [2003], « An Invitation to Quantum Game Theory », *International Journal of Theoretical Physics*, 42 (5), p. 1089-1099.
- POTHOS E. M. et BUSEMEYER J. R. [2009], « A Quantum Probability Explanation for Violations of “Rational” Decision Theory », *Proceedings of the Royal Society B*, 276 (1665), p. 2171-2178.
- POTHOS E. M. et BUSEMEYER J. R. [2013], « Can Quantum Probability Provide a New Direction for Cognitive Modeling? », *Behavioral and Brain Sciences*, 36 (3), p. 255-327.
- SHAFIR E. B., SMITH E. E. et OSHERSON D. N. [1990], « Typicality and Reasoning Fallacies », *Memory & Cognition*, 18 (3), p. 229-239.
- STOLARZ-FANTINO S., FANTINO E., ZIZZO D. J. et WEN J. [2003], « The Conjunction Effect: New Evidence for Robustness », *American Journal of Psychology*, 116 (1), p. 15-34.
- TENTORI K. et CRUPI V. [2013], « Why Quantum Probability Does Not Explain the Conjunction Fallacy (Comment) », *Behavioral and Brain Sciences*, 36 (3), p. 308-310.
- TENTORI K., CRUPI V. et RUSSO S. [2013], « On the Determinants of the Conjunction Fallacy: Probability versus Inductive Confirmation », *Journal of Experimental Psychology: General*, 142 (1), p. 235-255.
- TRUEBLOOD J. S., POTHOS E. M. et BUSEMEYER J. R. [2014], « Quantum Probability Theory as a Common Framework for Reasoning and Similarity », *Frontiers in Psychology*, 5, art. 322, p. 1-4.
- TVERSKY A. et KAHNEMAN D. [1982], « Judgments of and by Representativeness », dans D. KAHNEMAN, P. SLOVIC et A. TVERSKY (dir.), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 84-98.
- TVERSKY A. et KAHNEMAN D. [1983], « Extensional versus Intuitive Reasoning: The Conjunction Fallacy in Probability Judgment », *Psychological Review*, 90 (4), p. 293-315.
- WANG Z. J. et BUSEMEYER J. R. [2013], « A Quantum Question Order Model Supported by Empirical Tests of an A Priori and Precise Prediction », *Topics in Cognitive Science*, 5 (4), p. 689-710.
- WANG Z. J., SOLLOWAY T., SHIFFRIN R. M. et BUSEMEYER J. R. [2014], « Context Effects Produced by Question Orders Reveal Quantum Nature of Human Judgments », *PNAS*, 111 (26), p. 9431-9436.
- YUKALOV V. I. et SORNETTE D. [2011], « Decision Theory with Prospect Interference and Entanglement », *Theory and Decision*, 70 (3), p. 283-328.

## ANNEXES

*I. RÉSULTATS : TABLEAU DE CONTINGENCE*

Les résultats de l'expérience sont indiqués dans le tableau A1.

Tableau A1. *Tableau de contingence des fréquences conjointes pour chaque tâche, pour l'un et l'autre ordre des questions ( $n(X_i, Y_j)$  représente la fréquence des réponses  $X_i$  suivies de  $Y_j$ ).*

Tâche	K.	Monsieur F.	Bill	Linda
$(Q_X, Q_Y)$	$(Q_N, Q_l)$	$(Q_M, Q_H)$	$(Q_C, Q_J)$	$(Q_B, Q_F)$
$n(X_o, Y_o)$	0,09	0,10	0,06	0,01
$n(X_o, Y_n)$	0,08	0,22	0,55	0,01
$n(X_n, Y_o)$	0,11	0,10	0,06	0,67
$n(X_n, Y_n)$	0,72	0,58	0,33	0,31
$n(Y_o, X_o)$	0,07	0,11	0,13	0,03
$n(Y_n, X_o)$	0,06	0,23	0,53	0,01
$n(Y_o, X_n)$	0,16	0,05	0,08	0,54
$n(Y_n, X_n)$	0,71	0,61	0,26	0,42

*II. TESTS T1-T6 POUR LES ÉQUATIONS GR*

Tester l'équation GR (équation 6)

$$p(B_o | F_o) = p(F_o | B_o) = p(B_n | F_n) = p(F_n | B_n) \quad (8)$$

est équivalent à tester six égalités de deux termes :

$$T1: p(B_o | F_o) = p(F_o | B_o), \quad (9)$$

$$T2: p(B_o | F_o) = p(B_n | F_n), \quad (10)$$

$$T3: p(B_o | F_o) = p(F_n | B_n), \quad (11)$$

$$T4: p(F_o | B_o) = p(B_n | F_n), \quad (12)$$

$$T5: p(F_o | B_o) = p(F_n | B_n), \quad (13)$$

$$T6: p(B_n | F_n) = p(F_n | B_n). \quad (14)$$